

**УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК УСИЛЕННЫМИ
КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ, ЗАПОЛНЕННОЙ СРЕДОЙ
ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ОСЕВОМ СЖАТИИ С УЧЕТОМ
ДИСКРЕТНЫХ РАЗМЕЩЕНИЙ РЕБЕР**

З.Ф.ИСАЕВ

ИММ НАН Азербайджана

Данная статья посвящена исследованию устойчивости цилиндрических оболочек усиленными кольцевыми ребрами, заполненной упругой средой при продольном осевом сжатии. Проведен анализ влияния параметров внешней среды на параметры критических напряжений.

Подкрепленные цилиндрические оболочки широко применяются в качестве несущих элементов конструкций современной техники. В рабочих условиях они находятся в контакте различных сред. К расчетной модели подкрепленных цилиндрических оболочек, заполненной средой, приводится, например, различные емкости и трубопроводы, конструкции специального назначения и т.д. Поэтому разработка теории и методов расчета на устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек с учетом внешних воздействий является актуальной задачей, имеющей большие практические значения. Описание в литературе решения относится преимущественно к подкрепленной цилиндрической оболочки без среды [1]. Задачи устойчивости таких конструкций со средой практически не изучены. Отметим, что устойчивость гладких цилиндрических оболочек с заполнителем достаточно полностью исследована в работах [2]. Колебания таких конструкций изучены в работах [4], [5].

Задача решена энергетическим способом. Потенциальная энергия оболочки, нагруженная осевыми сжимающими силами, имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right)^2 + 2(1-\nu) \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\theta + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)R^2} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E_h}{2R} \sum_{j=1}^{k_1} \int_0^{2\pi} \left[F_h \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w - \frac{h_n}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{I_{xh}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)^2 + \frac{G_h}{R^2 E_h} I_{kp,h} \times \right. \\
& \left. \times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right]_{\xi=\xi_j} d\theta - \frac{\sigma_x h}{2} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\theta. \quad (1)
\end{aligned}$$

Здесь $\xi = \frac{x}{r}$, $\theta = \frac{y}{r}$; E_h , G_h - модуль упругости и сдвига материала продольного ребер, соответственно; k_1 - количество поперечных ребер; σ_x - осевые сжимающие напряжения; u, v, w - компоненты вектора перемещений оболочки; h и r - толщина и радиус оболочки, соответственно; E, ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона оболочки; $F_h, I_{xh}, I_{kp,h}$ - площадь и моменты инерции поперечного сечения продольного стержня, соответственно, относительно оси ox и oz , а также момент инерции при кручении.

Влияние среды на оболочку определяется как внешних поверхностных нагрузок, приложенных к оболочке, и вычисляется как работа, совершенная этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_0^{\xi_2} \int_0^{2\pi} (q_x u + q_y v + q_z w) d\xi d\theta, \quad (2)$$

где q_x, q_y, q_z - компоненты контактного давления со стороны заполнителя на оболочку.

Полная энергия системы такова:

$$\Pi = \mathcal{D} + A_0.$$

Уравнения равновесия среды в векторной форме имеет вид [3]:

$$a_e^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} - a_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{s} = 0. \quad (3)$$

Здесь $a_t = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $a_e = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ - скорости распространения продольных и поперечных волн в среде, соответственно; $\vec{s}(s_x, s_\theta, s_z)$ - вектор перемещения, λ, μ - коэффициенты Ламе. К системам уравнений равновесия среды (2) прибавляются контактными условиями. Предполагается, что контакт между оболочкой и средой жесткий, т.е. при $r = R$

$$u = s_x, \quad v = s_\theta, \quad w = s_z. \quad (4)$$

$$q_x = \sigma_{rx}, \quad q_y = \sigma_{r\theta}, \quad q_z = -\sigma_{rr}, \quad w = s_r. \quad (5)$$

Компоненты $\sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rr}$ тензора напряжений определяются следующим образом [2]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rx} &= \mu_s \left(\frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x} \right); \sigma_{r\theta} = \mu_s \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} \right] \\ \sigma_{rr} &= \lambda_s \left(\frac{\partial s_r}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rs_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu_s \frac{\partial s_r}{r}.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь λ_s, μ_s – коэффициенты Ламе для среды.

Дополняя контактными условиями (4), (5) уравнения равновесия среды (3), приходим к контактной задаче об устойчивости оболочки, подкрепленные кольцевыми ребрами и заполненной средой. Другими словами, задача об устойчивости подкрепленной оболочки со средой, сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек, среды при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Компоненты вектора перемещений оболочки ищем в виде

$$u = A \cos \chi^\xi \cos n\theta, \quad v = B \sin \chi^\xi \sin n\theta, \quad w = C \sin \chi^\xi \cos n\theta, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Решения системы (3) имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}S_x &= \left[\left(-kr \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} - 4(1-\nu_s) k I_n(kr) \right) A_s + k I_n(kr) B_s \right] \cos n\theta \cos \chi^\xi \\ S_\theta &= \left[-\frac{n}{r} I_n(kr) B_s - \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} C_s \right] \sin n\theta \sin \chi^\xi \\ S_r &= \left[-k^2 r I_n(kr) B_s - \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} B_s + \frac{n}{r} I_n(kr) C_s \right] \cos n\theta \sin \chi^\xi.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь I_n - модифицированная функция Бесселя n -го порядка первого рода.

Используя контактные условия (4), перемещение оболочек (7), решение уравнения равновесия среды (8), постоянные A_s, B_s, C_s выразим через A, B, C . Выполнения контактных условий нам дает следующую систему алгебраических уравнений относительно A_s, B_s, C_s :

$$\begin{aligned}(-k^2 R I_n'(kR) - 4(1-\nu_s) k I_n(kR)) A_s + k I_n(kR) B_s &= A \\ -\frac{n}{R} I_n(kR) B_s - k I_n'(kR) C_s &= B \\ -k^2 R I_n(kR) A_s + k I_n'(kR) B_s + \frac{n}{R} I_n(kR) C_s &= C.\end{aligned}\quad (9)$$

С помощью системы (9) постоянные A_s, B_s, C_s выражаем через постоянные A, B, C :

$$\begin{aligned} A_s &= \Delta^{-1}(\Delta_1^{(1)}A + \Delta_1^{(2)}B + \Delta_1^{(3)}C); \quad B_s = \Delta^{-1}(\Delta_2^{(1)}A + \Delta_2^{(2)}B + \Delta_2^{(3)}C); \\ C_s &= \Delta^{-1}(\Delta_3^{(1)}A + \Delta_3^{(2)}B + \Delta_3^{(3)}C). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь Δ - главный, $\Delta_i^{(3)}$ вспомогательные определители системы (9).

Используя (6), (8) и (10) для компоненты вектора напряжений получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[\left(q_{11} \Delta_1^{(1)} + q_{12} \Delta_2^{(1)} + q_{13} \Delta_3^{(1)} \right) \cdot A + \left(q_{11} \Delta_1^{(2)} + q_{12} \Delta_2^{(2)} + q_{13} \Delta_3^{(2)} \right) \cdot B + \right. \\ &+ \left. \left(q_{11} \Delta_1^{(3)} + q_{12} \Delta_2^{(3)} + q_{13} \Delta_3^{(3)} \right) \cdot C \right] \cos n\varphi \cos kx \\ \sigma_{r\varphi} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[\left(p_{11} \Delta_1^{(1)} + p_{12} \Delta_2^{(1)} + p_{13} \Delta_3^{(1)} \right) \cdot A + \left(p_{11} \Delta_1^{(2)} + p_{12} \Delta_2^{(2)} + p_{13} \Delta_3^{(2)} \right) \cdot B + \right. \\ &+ \left. \left(p_{11} \Delta_1^{(3)} + p_{12} \Delta_2^{(3)} + p_{13} \Delta_3^{(3)} \right) \cdot C \right] \sin n\varphi \sin \chi\xi \\ \sigma_{rr} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[\left(r_{11} \Delta_1^{(1)} + r_{12} \Delta_2^{(1)} + r_{13} \Delta_3^{(1)} \right) \cdot A + \left(r_{11} \Delta_1^{(2)} + r_{12} \Delta_2^{(2)} + r_{13} \Delta_3^{(2)} \right) \cdot B + \right. \\ &+ \left. \left(r_{11} \Delta_1^{(3)} + r_{12} \Delta_2^{(3)} + r_{13} \Delta_3^{(3)} \right) \cdot C \right] \cos n\varphi \sin \chi\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_{11} &= \left(k^\square I_n(k^\square) + k^\square I_n''(k^\square) + (5 - 4\nu_s) I_n'(k^\square) \right) k^{\square 2}; \quad q_{12} = -2k^{\square 2} I_n'(k^\square); \\ q_{13} &= -nk^\square I_n(k^\square); \quad p_{13} = k^{\square 2} I_n''(k^\square) - k^\square I_n'(k^\square) + n^2 I_n(k^\square); \quad k^\square = kR \\ p_{11} &= -nk^{\square 2} I_n(k^\square); \quad p_{12} = 2n \left(k^\square I_n'(k^\square) - I_n(k^\square) \right); \\ r_{11} &= \left(2(1 - 2\nu_s) I_n(k^\bullet) + 2k^\bullet I_n'(k^\bullet) \right) k^{\bullet 2}; \quad r_{12} = -2k^{\bullet 2} I_n''(k^\bullet); \\ r_{13} &= 2n \left(I_n(k^\bullet) - k^\bullet I_n'(k^\bullet) \right); \quad r_{14} = \left(2(1 - 2\nu_s) K_n(k^\bullet) + 2k^\bullet K_n'(k^\bullet) \right) k^{\bullet 2}; \\ r_{15} &= -2k^{\bullet 2} K_n''(k^\bullet); \quad r_{16} = 2n \left(I_n(k^\bullet) - k^\bullet I_n'(k^\bullet) \right). \end{aligned}$$

В результате для q_x, q_φ, q_z находим:

$$\begin{aligned} q_x &= \left(\check{C}_{x1} A + \check{C}_{x2} B + \check{C}_{x3} C \right) \cos n\varphi \sin \chi\xi, \\ q_\varphi &= \left(\check{C}_{\varphi 1} A + \check{C}_{\varphi 2} B + \check{C}_{\varphi 3} C \right) \sin n\varphi \sin \chi\xi, \\ q_r &= \left(\check{C}_{r1} A + \check{C}_{r2} B + \check{C}_{r3} C \right) \cos n\varphi \sin \chi\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\check{C}_{x_1} &= -\mu_s \Delta^{-1} (q_{11} \Delta_1^{(1)} + q_{12} \Delta_2^{(1)} + q_{13} \Delta_3^{(1)}); \check{C}_{x_2} = -\mu_s \Delta^{-1} (q_{11} \Delta_1^{(2)} + q_{12} \Delta_2^{(2)} + q_{13} \Delta_3^{(2)}); \\
\check{C}_{x_3} &= -\mu_s \Delta^{-1} (q_{11} \Delta_1^{(3)} + q_{12} \Delta_2^{(3)} + q_{13} \Delta_3^{(3)}); \\
\check{C}_{\varphi_1} &= -\mu_s \Delta^{-1} [p_{11} \Delta_1^{(1)} + p_{12} \Delta_2^{(1)} + p_{13} \Delta_3^{(1)}]; \check{C}_{\varphi_2} = -\mu_s \Delta^{-1} (p_{11} \Delta_1^{(2)} + p_{12} \Delta_2^{(2)} + p_{13} \Delta_3^{(2)}); \\
\check{C}_{\varphi_3} &= -\mu_s \Delta^{-1} (p_{11} \Delta_1^{(3)} + p_{12} \Delta_2^{(3)} + p_{13} \Delta_3^{(3)}); \\
\check{C}_{r_1} &= -\mu_s \Delta^{-1} (r_{11} \Delta_1^{(1)} + r_{12} \Delta_2^{(1)} + r_{13} \Delta_3^{(1)}); \check{C}_{r_2} = -\mu_s \Delta^{-1} (r_{11} \Delta_1^{(2)} + r_{12} \Delta_2^{(2)} + r_{13} \Delta_3^{(2)}); \\
\check{C}_{r_3} &= -\mu_s \Delta^{-1} (r_{11} \Delta_1^{(3)} + r_{12} \Delta_2^{(3)} + r_{13} \Delta_3^{(3)}).
\end{aligned}$$

После подстановки (12) в (2) и интегрирования по ξ и θ получаем для работы внешних поверхностных нагрузок, приложенных к оболочке

$$\begin{aligned}
A_0 &= -R^2 \pi \left[S_2 \check{C}_{x_1} A^2 + (S_2 \check{C}_{x_2} + S_1 \check{C}_{\varphi_1}) AB + (S_2 \check{C}_{x_3} + S_1 \check{C}_{r_1}) AC \right. \\
&\quad \left. + S_1 (\check{C}_{\varphi_3} + \check{C}_{r_2}) BC + S_1 \check{C}_{\varphi_2} B^2 + S_1 \check{C}_{r_3} C^2 \right].
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь S_1, S_2 постоянные.

Используя (1), (7), (13) для полной энергии системы получим полином второго порядка относительно параметров постоянных A, B, C :

$$\Pi = \check{\varphi}_{11} A^2 + \check{\varphi}_{22} B^2 + (\check{\varphi}_{33} - p_h) C^2 + \check{\varphi}_{44} AB + \check{\varphi}_{55} AC + \check{\varphi}_{66} BC.$$

Отметим, что величины $\check{\varphi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) имеют громоздкий вид, поэтому их здесь не приводим.

Условия экстремума Π по параметрам A, B, C сводят решение задачи об устойчивости подкрепленных оболочек заполненной средой к однородным системам линейных алгебраических уравнений третьего порядка, нетривиальные решения которых возможны лишь в случае, если определитель этой системы равен нулю:

$$\det \|\check{c}_{ij}\| = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{14}$$

или в раскрытом виде

$$\begin{cases} 2\check{\varphi}_{11}A + \check{\varphi}_{44}B + \check{\varphi}_{55}C = 0, \\ \check{\varphi}_{44}A + 2\check{\varphi}_{22}B + \check{\varphi}_{66}C = 0, \\ \check{\varphi}_{55}A + \check{\varphi}_{66}B + 2(\check{\varphi}_{33} - p_h)C = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Из условия равенство нулю определителя системы (15) получим формулу для вычисления параметра критических напряжений, которую можно записать в виде:

$$p_h = \frac{\bar{\varphi}_{11}\bar{\varphi}_{66}^2 + \bar{\varphi}_{22}\bar{\varphi}_{55}^2 + \bar{\varphi}_{33}\bar{\varphi}_{44}^2 - \bar{\varphi}_{44}\bar{\varphi}_{55}\bar{\varphi}_{66} - \bar{\varphi}_{11}\bar{\varphi}_{22}\bar{\varphi}_{33}}{\bar{\varphi}_{33}\bar{\varphi}_{44}^2 - 4\bar{\varphi}_{11}\bar{\varphi}_{22}\bar{\varphi}_{33}}. \quad (16)$$

Из (16) видно, что p_h имеет точки разрыва. Положения точек разрыва определяются из уравнения

$$\bar{\varphi}_{33}\bar{\varphi}_{44}^2 - 4\bar{\varphi}_{11}\bar{\varphi}_{22}\bar{\varphi}_{33} = 0.$$

Зная точки разрыва p_{hp} , всегда можно определить границы области, в которой лежит искомым минимальный корень уравнения (14). Определив для заданных параметров, выбрав из них $(p_{hp})_{\min}$, находим $p_{h.kp}$. Приведем результаты исследования влияния числа ребер и жесткости сред на критическое напряжение осевого сжатия. Вычисления выполнены для оболочки, среды и ребер с такими параметрами:

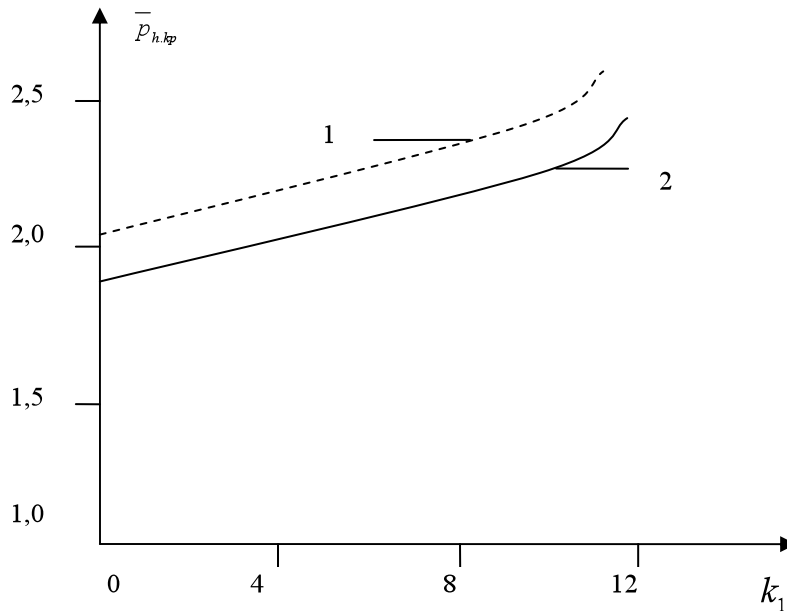


Рис. 1. Зависимость $\bar{p}_{h.kp}$ от количества поперечных ребер k_1 :
1- со средой; 2- без среды.

$$E = E_n = 6,67 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; \nu = 0,3; \chi = 1; n = 8; h_n = 1,95 \text{ мм}; R = 160 \text{ мм};$$

$$L_1 = 800 \text{ мм}; F_s = 5,75 \text{ мм}^2; I_{xn} = 19,9 \text{ мм}^4; h = 0,45 \text{ мм}; k_1 = 4;$$

$$I_{kp.n} = 0,48 \text{ мм}^4; a_e = 2,25 a_t; a_t = 308 \text{ м/с}.$$

На рис.1 представлена зависимость значения $\bar{p}_{h,kr} = \frac{P_{h,kr}}{P_0}$ (P_0 - параметр критических напряжений для неподкрепленной оболочки) вычисленных на основе формулы (16) от количества поперечных ребер k_1 . Из рисунка видно, что наличие среды и с ростом k_1 значения критического $\bar{p}_{h,kr}$ напряжения увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. «Наукова думка», 1980, 367с.
2. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. М., Наука, 1977, 331 с.
3. Лятифов Ф.С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку, Элм, 1999, 164с.
4. Latifov F.S., Jafarova I.T. Asymptotic investigations of eigen vibrations of medium-filled cylindrical shells stiffened by annular ribs. AMEA «Xəbərələr»XXV, №4, Bakı, 2005. səh. 135-140.
5. Амензаде Р.Ю., Лятифов Ф.С., Гиясбейли С.А. Волны в двухфазной жидкости, заключенные в многослойную упругую трубку. BDU, «Xəbərələr», №4, 2002, s.138-145.

İÇƏRİSİNDƏ MÜHİT OLAN DİSKRET PAYLANMIŞ BOYUNA ÇUBUQLARLA MÖHKƏMLƏNDİRİLMİŞ SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN DAYANIQLIĞI

Z.F.İSAYEV

XÜLASƏ

Məqalədə boyuna çubuqlarla möhkəmləndirilmiş və içərisində mühit olan silindrik örtüyün dayanıqlığı tədqiq olunmuşdur. Çubuqların müntəzəm yerləşdiyi qəbul edilərək, ədədi üsulla böhran gərginliyi tapılmışdır. Mühit üç ölçülü xətti elastiki cisim kimi modelləşdirilmişdir.

STABILITY OF MEDIUM FILLED CYLINDRICAL SHELLS REINFORCED BY TRANSVERSE RIBS UNDER LONGITUDINAL AXIAL COMPRESSION WITH REGARD TO DISCRETE ARRANGEMENT OF RIBS.

Z.F.ISAYEV

SUMMARY

The paper is devoted to the investigation of stability of elastic medium filled cylindrical shells reinforced by transverse ribs under axial compression. Influence of parameters of medium on critical stresses parameter is analyzed.